מועד ב', סמסטר חורף תשפ"ד - אלגברה 1מ1, 104064
28.5.24

ת"ז :

פקולטה :

- נא למלא את מספר ת"ז שלכם בתיבה המתאימה בדף זה, בכתב ברור וקריא.
- משך המבחן : 3 שעות.
- השימוש בחומר עזר כלשהו ובמחשבונים אסור בהחלט.
- רשמו את כל תשובותיכם בדפים אלה. אפשר להשתמש בשני צידי הדף.
- **ברשותכם מחברות טיוטה. מחברות הטיוטה לא יאספו.**
- **בשאלות 1-3** יש **לנמק** היטב כל תשובה. **תשובה לא מנומקת לא תחשב**.

בשאלות 4-7 יש לרשום את האות של התשובה הנכונה **כאות אנגלית גדולה** (A,B…) **בתוך התיבה** המתאימה תחת כל שאלה.

- **אין לתת נימוקים בשאלות 4-7.** נימוקים, אם יהיו, לא יבדקו.
- שאלת ש"ב (המהווה גם 10% מגן) היא 3-א'.
- **ההתאמות למילואימניקים מופיעות בעמוד הבא.**

ב ה צ ל ח ה !

<u>שאלה מס' 1</u> : (23 נקודות)

תהי $T:\mathbb{R}_2[x]\to\mathbb{R}^{2\times 2}$ העתקה לינארית המוגדרת ע"י :

$$T\left(a+bx+cx^2\right)=\begin{pmatrix} a-b+3c & a+b-c \\ 2a-2b+6c & 3a+3b-3c \end{pmatrix}$$

א. (6 נק') מצאו בסיס ומימד לגרעין של T.

ב. (6 נק') מצאו בסיס ומימד לתמונה של T .

ג. (3 נק') מצאו בסיס לתמונה של T, כך ש**כל** איבר בבסיס זה הוא מטריצה הפיכה.

ד. תהי $S:\mathbb{R}^{2\times 2}\to\mathbb{R}_2[x]$ ההעתקה הלינארית המוגדרת ע"י :

$$S\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}=(\alpha-\beta)+(2\alpha-\beta+\gamma)x+(\alpha+\gamma)x^2 .$$

(i) (3 נק') מצאו את $S\circ T$, כלומר רשמו נוסחה מפורשת להעתקה זו.

(ii) (5 נק') מצאו את המטריצה המייצגת של $S\circ T$ לפי הבסיס הסדור B הבא של $\mathbb{R}_2[x]$:

$B=\left\{1\ ,\ 1+x\ ,\ 1+x^2\right\}$, כלומר מצאו את $\left[S\circ T\right]_B$.

<u>שאלה מס' 2</u> : (22 נקודות)

תהי $A\in\mathbb{R}^{3\times 3}$ המטריצה הבאה:

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 2 & 4 & -4\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}.$$

א. (5 נק') מצאו את הפולינום האופייני של A, את הערכים העצמיים ואת הריבוי האלגברי והגיאומטרי של כל ערך עצמי.

ב. (8 נק') הוכיחו כי A לכסינה מעל $\mathbb{R}$ ומצאו מטריצה הפיכה P ומטריצה אלכסונית D כך ש $P^{-1}AP=D$.

ג. (4 נק') תנו דוגמא למטריצה $M\in\mathbb{R}^{3\times 3}$ בעלת פולינום אופייני כמו של A אבל **לא דומה** ל- A, או הוכיחו שלא קיימת מטריצה כזו.

ד. (5 נק') הוכיחו או הפריכו את הטענה הבאה: יהי U המרחב העצמי של הערך העצמי **הקטן** ביותר של A, ויהי W תת המרחב הבא של $\mathbb{R}^3$: $W=\left\{(a+2b,-7a+b,-6a+3b)\,\middle|\,a,b\in\mathbb{R}\right\}$ אזי $\mathbb{R}^3=U\oplus W$.

<u>שאלה מס' 3</u> : (31 נקודות) **סעיף א' בשאלה זו מהווה שאלת ש"ב.**

בשאלה זו 4 סעיפים. הוכיחו את הטענות הבאות או הפריכו ע"י דוגמא נגדית:

א. (10 נק') אם A לא ריבועית, אז לפחות אחת מהמטריצות $A\cdot A^t$ או $A^t\cdot A$ לא הפיכה.

ב. (7 נק') יהי V מרחב וקטורי מעל שדה F. ויהיו $U\,,W\subseteq V$ שני תת מרחבים של V כך ש $V=U\oplus W$. אם $v\in V$ כך ש- $v\notin U$ אז $v\in W$.

ג. (7 נק') יהי V מרחב וקטורי מעל שדה F ויהי $B=\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$ בסיס של V. אם $T:V\to V$ אופרטור לינארי כך ש $\{T(v_1)\ ,\ T(v_2)\}$ בסיס ל- $\mathrm{Im}T$, אז $\{v_3\ ,\ v_4\}$ בסיס ל- $KerT$.

ד. (7 נק') אם $A\in\mathbb{R}^{3\times3}$ עם ע"ע לא ממשי אז A לכסינה מעל $\mathbb{C}$.

בשאלות 4-7 יש לרשום את האות של התשובה הנכונה באות אנגלית גדולה (A,B...) בתוך התיבה המתאימה תחת כל שאלה

שאלה מס' 4 : (6 נקודות)

תהי $A=\begin{pmatrix}1 & z & 0\\ 1 & z^2+z & |z|\\ 1 & -1+z & z\end{pmatrix}\in\mathbb{C}^{3\times 3}$. נסמן ב- $z_1,\dots,z_k$ את כל הפתרונות השונים מ- 0 של המשוואה:

$\det(A)=-3|z|$. נסמן: $t=z_1\cdot z_2\cdot\dots\cdot z_k$ (מכפלת כל הפתרונות השונים מ- 0). אזי:

A. t הוא מספר ממשי חיובי.

B. t הוא מספר ממשי שלילי.

C. t הוא מספר מדומה טהור ($\mathrm{Re}(t)=0$).

D. מתקיים $\mathrm{Re}(t)=2\,\mathrm{Im}(t)$.

E. t נמצא ברביע הרביעי.

תשובה לשאלה 4:

שאלה מס' 5 : (6 נקודות)

יהיו $A,\ B\in\mathbb{R}^{5\times 5}$. סמנו את הטענה הנכונה:

A. אם למערכת $A\bar{x}=b$ יש פתרון לכל $b\in\mathbb{R}^5$ וקיים $c\in\mathbb{R}^5$ כך שלמערכת $B\bar{x}=c$ אין פתרון, אז למערכת $(BA)\bar{x}=0$ יש אינסוף פתרונות.

B. אם למערכת $A\bar{x}=0$ יש אינסוף פתרונות, וגם למערכת $B\bar{x}=0$ יש אינסוף פתרונות, אז גם למערכת $(A+B)\bar{x}=0$ יש אינסוף פתרונות.

C. אם קיים $b\in\mathbb{R}^5$ כך שלמערכת $A\bar{x}=b$ יש פתרון, אז לכל $c\in\mathbb{R}^5$ למערכת $A\bar{x}=c$ יש פתרון.

D. אם למערכת $A\bar{x}=0$ יש אינסוף פתרונות עם 2 דרגות חופש, וגם למערכת $B\bar{x}=0$ יש אינסוף פתרונות עם 2 דרגות חופש, אז A ו- B שקולות שורה.

E. אם למערכת $(AB)\bar{x}=b$ יש פתרון יחיד לכל $b\in\mathbb{R}^5$, אז גם למערכת $(A+B)\bar{x}=0$ יש פתרון יחיד לכל $b\in\mathbb{R}^5$.

תשובה לשאלה 5:

<u>שאלה מס' 6</u> : (6 נקודות)

יהי $B=\{1+x+x^2\ ,\ 1+x\ ,\ 1\}$ בסיס סדור של $\mathbb{R}_2[x]$, ויהי $T:\mathbb{R}_2[x]\to\mathbb{R}_2[x]$ אופרטור לינארי,

אשר המטריצה המייצגת שלו ביחס לבסיס B היא:

$$[T]_B=\begin{pmatrix}1&3&1\\2&5&3\\4&9&7\end{pmatrix}$$

נתון כי $8+ax\in \mathrm{Im}(T)$. אזי:

A. $a=0$; B. $a=2$; C. $a=32$; D. $a=\frac{16}{3}$; E. a ממשי כלשהו.

תשובה לשאלה 6:

<u>שאלה מס' 7</u> : (6 נקודות)

תהיינה $A,B,C\in\mathbb{R}^{n\times n}$ כך שהמטריצה C הפיכה, ומתקיים $AB=C-A$, אז:

A. 0 הוא לא ערך עצמי של A וגם לא ערך עצמי של B.

B. 1 הוא ערך עצמי של A אבל הוא לא ערך עצמי של B.

C. 1 הוא לא ערך עצמי של A ו- 0 הוא לא ערך עצמי של B.

D. 0 הוא לא ערך עצמי של A ו- (-1) הוא לא ערך עצמי של B.

E. (-1) הוא ערך עצמי של A וגם ערך עצמי של B.

תשובה לשאלה 7:

דף ריק למקרה הצורך